Введение

Проблема ускорения сходимости бесконечных кратных рядов с помощью методов экстраполяции в последнее время вызывает значительный интерес. Первая работа по ускорению сходимости кратных рядов была опубликована Чизхолмом [1]. В этой работе Чизхолм определил диагональные аппроксиманты Паде для двойных рядов вида .

*Определение 1* [1]: пусть – степенной ряд по двум переменным, тогда диагональным аппроксимантом Паде порядка называется рациональная функция

такая, что в разложении аннулируются все мономы суммарного порядка . Коэффициенты и определяются из линейной системы, возникающей при приравнивании коэффициентов степеней и до общего порядка .

Недиагональные аппроксиманты  были позднее определены Грейвсом-Моррисом, Хьюзом Джонсом и Мейкинсоном. Диагональные аппроксиманты из [1] были обобщены на степенные ряды от  переменных Чизхолмом и Макьюэном, а недиагональные аппроксиманты из были обобщены на  переменных Хьюзом Джонсом. Аппроксиманты Паде общего порядка для кратных степенных рядов были определены Левиным [2] и далее развиты Кайтом [8].

Общее обсуждение ускорения сходимости бесконечных двойных рядов и интегралов было представлено в работе Левина [3]. Cтатья Грайфа и Левина [4] объединяет общую идею из [3] с подходом, основанным на -преобразовании для одномерных бесконечных рядов, предложенных Левиным и Сиди. Ранее, Сиди уже предложил подход [7], в котором -преобразование используется последовавтельно для суммирования кратных рядов.

Рассмотрим некоторые детали подхода, основанного на асимптотических разложениях и обобщенном процессе экстраполяции Ричардсона, которые приводят к -преобразованиям.

-преобразование для одномерных бесконечных рядов

Рассмотрим *d*(*m*)-преобразование, предложенное в работе [6], для ускорения сходимости бесконечных рядов. Определим класс функций .

*Определение 2* [5]: функция , определённая для всех при котором , принадлежит множеству , если она имеет асимптотическое разложение Пуанкаре вида:

*Определение 3* [11]: пусть функция определена при , предположим, что найдётся последовательность невырожденных функций , … таких, что:

1. для всех ;
2. для каждого существует такое, что при всех .

Тогда говорят, что функция имеет асимптотическое разложение Пуанкаре

если для любого целого справедливо

Если, кроме того,  в (1), то говорят, что строго принадлежит ​. Здесь  может быть комплексным. Отметим также, что от функций не требуется дифференцируемости, поэтому . Определим семейство последовательностей .

*Определение 4* [5]: Последовательность принадлежит множеству , если она удовлетворяет линейному однородному разностному уравнению порядка  вида:

где . Здесь , и ..

Следующая теорема, приведённая в [6], является основой для -преобразования.

*Теорема 1*: пусть последовательность принадлежит , и пусть ряд ​ сходится. Предположим также, что:

и что:

где

Определим:

Тогда:

где – целые числа, а функции . Более того, если строго для некоторых целых , то:

Равенство в (8) достигается, когда целые числа, среди которых берется максимум, различны. Наконец, поскольку , они имеют асимптотическое разложение вида:

Важно [5]:

1. из (5) следует, что если , тогда и только тогда, когда  ​ строго; таким образом, если  ​ при , то , это означает, что при  для всех  условие (4) выполняется автоматически;
2. из (8) следует, что всегда;
3. аналогично, для имеем точно;
4. целые числа и функции в (7) зависят только от в разностном уравнении (2); таким образом, они одинаковы для всех решений , уравнения (2), удовлетворяющих (3), для которых ряд сходится;
5. из (3) и (8) также следует, что .

Аналогия с [5]:

1. ;
2. ;
3. ;
4. , ;
5. .

Проводя аналогию, видим, что принадлежит . Переменная здесь дискретна и принимает значения .Исследования [5] показывают, что требование является наиболее важным среди условий теоремы (3). Остальные условия, а именно (3)-(5) обычно выполняются автоматически. Поэтому для проверки принадлежности (где ) множеству достаточно убедиться, что . Хотя теорема (3) сформулирована для последовательностей, для которых ряд ​ сходится, соотношение (7)-(9) может выполняться и для расходящихся рядов, если их антипредел  определён в некотором смысле суммируемости. Заменив каждое  в (7) его верхней оценкой , добавив  к обеим частям (7) и применив формулировку определения , можно определить -преобразование.

*Определение 5* [5]: выберем последовательность целых чисел ​, где . Пусть  — неотрицательные целые числа. Тогда приближение  к определяется системой линейных уравнений:

Здесь представляют собой дополнительные неизвестные. В формуле (10) принято, что , поэтому . Этот процесс обобщённой экстраполяции Ричардсона (), генерирующий ​, называется -преобразованием или просто -преобразованием (для краткости). Это определение -преобразования было дано в [8] и отличается от исходного определения в [13] заменой на их верхние оценки . Такой подход более удобен для пользователя, поскольку не требует знания точных значений . Если же эти значения известны, их следует использовать для повышения точностей вычислений.

Для применения -преобразования необходимо определить значение . Это можно сделать одним из двух способов [5]:

1. методом проб и ошибок – начать тест с , и увеличивать до достижения удовлетворительного ускорения сходимости;
2. математической оценкой – использовать эмпирические правила: если , то:
3. ;

Псевдокод для -преобразования для одномерных рядов представлен на *Рисунке 1*, а пример его применения представлен на *Рисунке 2*.

**Вход**: ряд S в виде - последовательность, удовлетворяющая разностному уравнению (2), – порядок преобразования (обосновано в *Теореме 1*), – возрастающая последовательность целых чисел для выбора точек (*Определение 5*)

**Выход**: - аппроксимация суммы ряда

# Проверка условий *Теоремы 2* (стр. 6, условия (3)-(5))

**if** не удовлетворяет условиям *Теоремы 2*: # Условия (3)-(5)

**return** «Ряд не удовлетворяет условиям *Теоремы 2*»

**else**:

**for** от до : # ()

Вычислить частичные суммы (по формуле для частичных сумм (6))

**for** от 1 до :

Вычислить конечные разности # *Определение 5*

Сформировать уравнение (10)

Решить систему линейных уравнений (10) относительно и

**return**

*Рисунок 1*. Псевдокод для -преобразования для одномерных рядов.

**Вход**: , ,

**Выход**:

*Рисунок 2*. Пример применения -преобразования для одномерных рядов.

Последовательное -преобразование для -мерных рядов

Вычисление многомерных рядов может быть выполнено с помощью последовательного применения -преобразования при определённых условиях. Такой подход был впервые предложен в работе [15] для двойных бесконечных рядов, где он также был теоретически обоснован и проиллюстрирован на примерах. Кратко опишем данный метод. Чтобы упростить изложение для дальнейшего использования, введём некоторые обозначения:

Рассмотрим -мерный бесконечный ряд  и определим [14]:

Таким образом, .

*Лемма 1* [14]: предположим, что для каждого  и фиксированных , применяя последовательность  принадлежит классу  для некоторого целого ​(это предположение, по-видимому, выполняется, когда  для каждого  и фиксированных . Следовательно, может быть вычислено путём применения -преобразования к ряду , вычисление  завершается применением -преобразования к ряду .

Преимущество этого подхода к суммированию -мерных рядов заключается в том, что данное предположение автоматически выполняется, когда , где  для некоторых целых чисел . Псевдокод для последовательного -преобразования для -мерных рядов представлен на *Рисунке 3*, а пример его применения представлен на *Рисунке 4*.

**Вход**: -мерный массив элементов , вектор порядков преобразований , двумерный массив - последовательности точек для каждой размерности

**Выход**: ускоренная сумма

Инициализировать

**for** от до :

**if** **:**

**return** «Ошибка: размерность не удовлетворяет условиям»

**else**:

# Применить -преобразование (*Лемма 1***)**

**for** каждого фиксированного набора :

Вычислить частичные суммы (аналогично формуле (6))

Вычислить конечные разности требуемых порядков # *Определение 5*

Построить и решить систему уравнений (аналогичную (10))

Результат записать в

**return**

*Рисунок 3*. Псевдокод для последовательного -преобразования для -мерных рядов.

**Вход**: , [[5, 10], [4, 8]]

**Выход**:

*Рисунок 4*. Пример применения последовательного -преобразования для -мерных рядов.

Факториальное -преобразование

Путём перезаписи асимптотических разложений функций  из (9) в других формах, получаем другие варианты -преобразования [11]. Например, произвольный асимптотический ряд при  можно также представить в виде  при , где  и ​. Здесь  для , ​, и так далее. Для каждого  коэффициент ​ однозначно определяется значениями . Если теперь переписать асимптотические разложения  при  в форме ​ при  и продолжить аналогичным образом, можно определить факториальное -преобразование для бесконечных рядов с помощью линейных уравнений:

И для бесконечных последовательностей с помощью линейных уравнений:

Псевдокод для факториального -преобразования представлен на *Рисунке 5*, а пример его применения представлен на *Рисунке 6*.

**Вход**: ряд S в виде – последовательность с асимптотикой вида (9), – порядок преобразования (*Теорема 1*), – параметр сдвига, – последовательность точек (*Определение 5*)

**Выход**: приближение

#Проверить соответствие асимптотики

**if** не соответствует формуле (9):

**return** "Ошибка: неверный тип асимптотики"

**else**:

**for** от до ():

Вычислить частичные суммы (аналогично формуле (6))

**for** от 0 до :

Вычислить факториальные члены из (11)

Сформировать уравнение (11)

Решить систему линейных уравнений (11) относительно и

**return**

*Рисунок 5*. Псевдокод для факториального -преобразования.

**Вход**: , ,

**Выход**:

*Рисунок 6*. Пример применения факториального -преобразования.

-трансформация

Метод, называемый -преобразованием, был предложен Хомейером [18] для ускорения сходимости рядов Фурье по синусам и косинусам. Рассмотрим это преобразование, так как оно является частным случаем  и вариантом **-**преобразования. Пусть дан ряд Фурье:

а его частичные суммы имеют вид:

Тогда приближение  к сумме этого ряда определяется через линейную систему:

где

а - некоторая фиксированная константа. Здесь ​и ​ — дополнительные вспомогательные неизвестные. Хомейер предложил эффективный рекуррентный алгоритм для реализации -преобразования, отличающийся высокой экономичностью.

Однако у этого преобразования есть два недостатка [11]:

1. Ограниченное применение: класс ряд рядов Фурье, для которых метод работает успешно, довольно узок. Это видно при сравнении уравнений (12) с определяющими уравнениями для ​:

где при специальном выборе , а именно . Таким образом, ​ и ​ используют практически одинаковое количество членов ряда . Уравнения в (12) сразу же показывают, что -преобразование может быть эффективным, когда

то есть, когда  связана с функцией  Такая ситуация возможна только тогда, когда  и   оба принадлежат классу . Учитывая это, становится ясно, что, если хотя бы одна из последовательностей  или   (или обе) принадлежат классу  при , -преобразование перестаёт быть эффективным. В отличие от этого, преобразование при подходящем значении  остаётся эффективным.

В качестве примера рассмотрим [11] ряд косинусов , где  — полиномы Лежандра. Поскольку , получаем, что . В этом случае:

1. преобразование может быть применено напрямую к ;
2. -преобразование с использованием комплексного подхода также применимо и требует примерно вдвое меньше вычислений по сравнению с прямым методом;
3. *H*-преобразование неэффективно.
4. Из определения ​ очевидно [11], что предполагается доступность ​ и ​​. В таком случае, -преобразование с (которое является ничем иным, как преобразованием Левина) в сочетании с комплексным подходом обеспечивает требуемую точность при примерно вдвое меньших вычислительных затратах по сравнению с *H*-преобразованием, когда последнее применимо. Разумеется, лучшая устойчивость и точность достигаются при использовании -преобразования с APS вблизи точек сингулярности.

Псевдокод для последовательного -преобразования представлен на *Рисунке 7*, а пример его применения представлен на *Рисунке 8*.

**Вход**: ряд Фурье (определение перед (12)), - порядок преобразования, – параметр сдвига, коэффициенты , (следует из условия эффективности-преобразования)

**Выход**: приближение

**if** , :

**return** "Ошибка: коэффициенты не ∈ "

**else**:

**for** от до :

Вычислить частичную сумму ряда Фурье

Вычислить (аналогично (13))

Сформировать уравнение (12)

Решить систему линейных уравнений (12) относительно , ,

**return**

*Рисунок 7*. Псевдокод для -преобразования.

**Вход**: *, ,* ,

**Выход**:

*Рисунок 8*. Пример применения -преобразования.

Заключение

Полученные преобразования могут быть применены к широкому классу последовательностей, включая, среди прочего, линейные и общие линейные последовательности, где обычно применяется -алгоритм. Они были созданы на основе строгого анализа асимптотических разложений хвостов бесконечных рядов. В некоторых частных случаях приближения, полученные с помощью -преобразования, совпадают с теми, которые даёт преобразование Шенкса.

Список литературы

[1] Rational approximants defined from double power series // J. S. R. Chisholm. – 1973. – P. 941-848.

[2] General Rational approximants in N variables // D. Levin. – 1976. – P. 1-8.

[3] On accelerating the convergence of infinite double series and integrals // D. Levin. – 1980. – P. 1331-1980.

[4] The -transformation for infinite double series and the -transformation for infinite double integrals. // E. Houle, Lothar Reichel – 1998. – P. 695-714.

[5] Extrapolation Methods for infinite multiple series and integrals // D. Levin, A. Sidi – 2001. – P. 167-184.

[6] Two new classes of nonlinear transformations for accelerating the convergence of infinite integrals and series // D. Levin, A. Sidi – 1975. – P. 175-215.

[7] Further convergence and stability results for the generalized Richardson extrapolation process with and application to the -transformation for infinite integrals // A. Sidi. – 1999. – P. 153-167.

[8] An algorithm for a generalization of the Richardson extrapolation process // W. F. Ford and A. Sidi. – 1987. – P. 1212-1232.

[9] Exponential function approximation to Laplace transform inversion and development of non-linear methods for accelerating the convergence of infinite integrals and series // I. M. Longman. – 1977.

[10] Development of non-linear transformations for improving convergence of sequences // D. Levin. – 1975. – P. 371-388, 1331-1345.

[11] Practical Extrapolation Methods: Theory and Applications // A. Sidi – 2003. – P. 121-157, 238-250, 253-261, 363-371.

[12] An algorithm for a special case of a generalization of the Richardson extrapolation process // A. Sidi. – 1982. – P. 223-233.

[13] Acceleration of linear and logarithmic convergence // D. A. Smith, W. F. Ford. – 1979. – P. 223-240.

[14] Numerical comparisons of nonlinear convergence accelerators // D. A. Smith, W. F. Ford. – 1982. – P. 481-499.

[15] A new method for deriving Pade approximants for some hypergeometric functions // A. Sidi. – 1981. – P. 37-40.

[16] A Maple package for transforming sequences and functions // J. Grotendorst. – 1991. – P. 325-342.

[17] A Levin-type algorithm for accelerating the convergence of Fourier series // H. H. H. Homeier. – 1992. – P. 245-254.